STO ROKOV TEÓRIE RELATIVITY
HUNDRED YEARS OF THEORY OF RELATIVITY

Jaroslav Franek[1]

[1] *Slovak University of Technology, Faculty of Electrical Engineering and Information Technology, Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava, Slovakia, e-mail: jaroslav.franek@stuba.sk*

Abstrakt Rok 2005 sa v mnohých krajinách sveta nesie v znamení stého výročia publikovania špeciálnej teórie relativity. V tomto príspevku sa venujeme základným myšlienkam tejto teórie v oblasti elektrodynamiky.

Summary In 2005, all civilised world will remind the 100 years anniversary of Publishing the original work on special theory of relativity by Albert Einstein. This contribution is a brief review of its principial ideas in the field of electrodynamics.

1. ÚVOD

Pred sto rokmi, 30. júna 1905, bola publikovaná práca [1] Alberta Einsteina *„K elektrodynamike pohybujúcich sa telies"* ktorá sa stala známa ako špeciálna teória relativity (ŠTR). ŠTR ovplyvnila všetky odvetvia fyziky a zapísala sa do zoznamu teórií, ktoré významne ovplyvnili celú civilizáciu. Z tohto dôvodu si mnohé inštitúcie pripomínajú rok 2005 ako Einsteinov rok. Pre autora predloženého príspevku je uvedené výročie impulzom k napísaniu stručnej a zrozumiteľnej rekapitulácie základných myšlienok ŠTR v ťažiskovej oblasti citovanej práce [1] – v elektrodynamike.

Je totiž paradoxom, že väčšina učebníc fyziky sa zaoberá dôsledkami ŠTR v oblasti mechaniky, pričom tie isté učebnice popisujú elektromagnetické pole pomocou Maxwellovych rovníc, ale dôsledne sa vyhýbajú problémom spojeným s pohybom elektricky nabitých (alebo zmagnetovaných) telies. Problém spomenutý v predošlej vete je podrobnejšie diskutovaný v monografii [2].

2. PODSTATA PROBLÉMU – ASYMETRIA MAXWELLOVYCH ROVNÍC

Einstein vychádzal v práci [1] zo známeho faktu, že Maxwellove rovnice (MR) obsahujú istú asymetriu. Prejavuje sa v tom, že ak sa na jeden a ten istý experiment pozeráme z hľadiska dvoch pozorovateľov, pričom jeden je v „pevnej" a druhý v „pohyblivej" sústave, tak dostaneme dva rozdielne výsledky. Jednoduchou ilustráciou uvedenej asymetrie je nasledujúci problém: Uvažujme osamotený bodový náboj. Pozorovateľ spojený so sústavou $\mathbf{k}'$, v ktorej sa náboj nepohybuje zaregistruje len elektrostatické pole (ESP) dané známym výrazom:

$$\vec{E}'(r') = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}'}{\left|\vec{r}'\right|^3}, \quad \vec{r}' = x'\vec{u}_x + y'\vec{u}_y + z'\vec{u}_z. \tag{1}$$

kde (x', y', z') sú kartézske zložky polohového vektora bodu v ktorom vyšetrujeme pole a $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ sú jednotkové vektory orientované do smeru osí, q je veľkosť bodového náboja umiestneného do stredu súradnicového systému $\mathbf{k}'$. Pole popísané vzťahom (1) je zjavne nevírové, teda platí

$$rot(\vec{E}') = 0\,. \tag{2}$$

Problém nastane, ak uvažujeme výsledky pozorovania iného pozorovateľa, ktorý je spojený so súradnicovou sústavou **K** pohybujúcou sa vzhľadom na predošlú sústavu $\mathbf{k}'$ rýchlosťou $\mathbf{v} = -v.u_x$ Bez akejkoľvek matematiky je jasné, že v sústave **K** sa bodový náboj pohybuje a predstavuje časovo premenný prúd. S premenným prúdom je spojená aj existencia premenného magnetického poľa. Teda v sústave **K** musíme zaregistrovať vírové pole.

Matematická transformácia vzťahov medzi sústavou $\mathbf{k}'$ a sústavou **K** bola (pred sto rokmi) popisovaná Galileovou transformáciou v tvare

$$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t. \tag{3a, 3b, 3c, 3d}$$

Inak povedané, pred Einsteinom sa považovalo sa samozrejme, že čas je veličina, ktorá je rovnaká v „pevnej" aj „pohyblivej" sústave, priečne súradnice v smere osí Y a Z boli pochopiteľne tiež rovnaké a rozdiel v súradnici x bol dôsledkom pohybu sústavy v smere osi X. Z transformačných vzťahov (3) zistíme, že pre ľubovoľnú zloženú funkciu vyjadrenú pomocou „čiarkovaných" premenných

$$f[x'(x, t), y'(y), z'(z), t'(x, t)] \qquad (4)$$

dostávame väzby medzi parciálnymi deriváciami podľa „čiarkovaných" a „nečiarkovaných" premenných. Funkcia (4) môže byť ľubovoľnou kartézskou zložkou vektora intenzity elektrického poľa, prípadne zložkou akéhokoľvek iného vektora poľa, ktorý chceme transformovať. Zjavne platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}, \qquad 5(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y'}, \qquad 5(b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z'}, \qquad 5(c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = v\frac{\partial f}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial t'}. \qquad 5(d)$$

Keďže parciálne derivácie podľa priestorových premenných (5a, 5b, 5c) sú rovnaké v čiarkovanej a nečiarkovanej sústave a pomocou parciálnych derivácii vyjadrujeme rotáciu použitú vo výraze (2), tak zjavne platí, že aj v sústave **K** je nevírové pole (nulová rotácia). Posledné tvrdenie je v rozpore s predchádzajúcim tvrdením o vírovom poli v sústave **K**. Inak povedané, MR viedli k paradoxu, pretože platili (boli správne) pre pozorovateľa v jednej sústave (v sústave **k**), ale dávali nezmyselné výsledky pre pozorovateľa v druhej sústave (v sústave **K**).

3. RIEŠENIE PARADOXU

Ešte pred publikovaním teórie relativity sa vyskytli práce, ktoré poukazovali na jestvovanie asymetrie medzi MR v pohyblivej a pevnej sústave. V súvislosti s riešením tejto asymetrie (vyššie uvedený paradox je len jeho ilustráciou) sa uvádzajú práce H. Poincareho a H. A. Lorentza (Lorentz sa zaoberal transformáciou MR a podľa neho je pomenovaná Lorenzova transformácia) . Uvedení autori však ostali na pôde matematiky a neuvedomili si fyzikálny dosah Lorentzovej transformácie na základné fyzikálne pojmy, ako je priestor a čas. Einstein v práci [1] riešil uvedený paradox tak, že nahradil Galileovu transformáciu Lorentzovou transformáciou, ktorá bola odvodená z predpokladu (experimentálne overeného), že rýchlosť svetla vo vákuu (c) je vo všetkých inerciálnych sústavách rovnaká. Nebudeme na tomto mieste rozoberať dôsledky Lorentzovej transformácie pre relativitu času meranú v rôznych sústavách, rovnako sa nebudeme zaoberať dôsledkami v kinematike a dynamike. Tieto dôsledky sú často diskutované v učebniciach fyziky. Pozrime sa na tomto mieste na konkrétny dôsledok Lorentzovej transformácie v prípade paradoxu opísaného v predošlých riadkoch. Lorentzovu transformáciu vyjadrujú nasledovné vzťahy (6):

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad 6(a)$$

$$x' = \beta(x - v.t), \qquad 6(b)$$

$$t' = \beta\left(t - \frac{v.x}{c^2}\right). \qquad 6(c)$$

Vzťah (6a) je pomocným výrazom použitým vo vzťahoch (6b) a (6c). Priečne súradnice vynášané v smere osí Y a Z sú v oboch sústavách rovnaké (teda bez zmeny platia rovnice (3b), (3c) a následne aj (5b), (5c)). Súradnice merané v smere osi X a časové údaje sú viazané vzťahmi (6b) a (6c). Ak na Lorentzovu transformáciu (6) aplikujeme obdobný postup, aký sme ukázali v prípade Galileovej transformácie (3), tak dostávame pre veličiny typu (4) iné transformácie parciálnych derivácií, ako tomu bolo v predchádzajúcich vzťahoch (5a) a (5d). Pre prípad Lorentzovej transformácie môžeme jednoducho (z pravidiel parciálneho derivovania zloženej funkcie) odvodiť vzťahy:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \beta\frac{\partial f}{\partial x'} - \beta\frac{v}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t'}, \qquad 7(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\beta.v\frac{\partial f}{\partial x'} + \beta\frac{\partial f}{\partial t'}. \qquad 7(b)$$

Dôsledkom transformačných vzťahov (7a) a (7b) už nebude platiť pre sústavu **K** vzťah (2) a pole sa stane vírovým. Nenulová hodnota na pravej strane rovnice (2) v sústave **K** zodpovedá fyzikálnej skutočnosti nielen kvalitatívne, ale aj kvantitatívne dáva výsledky, ktoré sú v súlade s experimentmi.

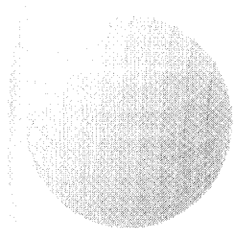
Vzťahy (6) a (7) nevedú len k odstráneniu konkrétne popísaného (ilustračného) paradoxu, ale umožňujú po priamom dosadení do Maxwellovej sústavy rovníc zapísať ich vo forme symetrickej pre „pohyblivú" sústavu **K** a „pevnú" sústavu **k**. Dôsledkom tohto môžeme vyjadriť transformáciu vektorov poľa, ktoré sú závislé od toho, v ktorej sústave sa pozorovateľ nachádza. Pre vyššie popísaný prípad bodového náboja, teda pre prípad čisto elektrostatického poľa v „pevnej" sústave dostaneme z Maxwellovych rovníc vyjadrenie pre pole elektrické aj magnetické pole v „pohyblivej" sústave **K**:

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E'_x \\ \beta.E'_y \\ \beta.E'_z \end{vmatrix} , \qquad 8(a)$$

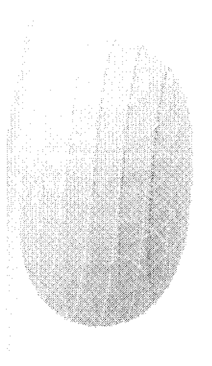
$$\vec{H} = \beta.\varepsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}' . \qquad 8(b)$$

Z rovnice (8a) vyplýva, že v sústave **K** „uvidí" pozorovateľ ESP, ktoré má zložku v smere pohybu rovnakú, ako v čiarkovanej sústave, avšak priečne zložky ESP sú násobené faktorom β, ktorý je vyjadrený rovnicou (6a). Znamená to, že pole, ktoré bolo v „pevnej" sústave guľovo symetrické a dalo sa znázorniť guľoplochou (množina bodov s rovnakou veľkosťou intenzity) (obr. 1) sa v pohyblivej sústave splošťuje v smere pohybu a dá sa znázorniť sploštených rotačným elipsoidom (obr. 2).

Rovnica (8b) „odstraňuje" paradox o ktorom sme písali v predošlom texte a vyjadruje reálne jestvujúce magnetické pole sústavy **K**, ktoré je len transformáciou ESP jestvujúceho v „pevnej" sústave.



Obr. 1. Znázornenie poľa bodového náboja v „kľudovej" sústave.
Fig.1. The field of point charge in a stationary system.



Obr. 2. Znázornenie poľa bodového náboja v sústave, ktorej rýchlosť je v = 0.67.c , smer rýchlosti je kolmý na plochu v pozadí.
Fig. 2. The field of a point charge in a moving system. Velocity v = 0.67.c The direction of the movement is perpendicular to the surface in background.

4. ZÁVER

Na technických univerzitách v Slovenskej republike sa tradične vyučuje elektrodynamika. Dôraz sa kladie na Maxwellove rovnice, avšak princípy ŠTR skryté v sústave týchto rovníc sú zanedbávané. Na jednej strane je to pochopiteľný ústupok inžinierskej praxi, na druhej strane sú však poslucháči technických univerzít ochudobnení o intelektuálny zážitok, ktorý elegantná fyzika ŠTR poskytuje každému vnímavému študentovi. Nazdávam sa, že je žiadúce umožniť záujemcom o „relativitu" jednoduchý a názorný vstup do problematiky. Ambíciou tohto článku je prispieť k naplneniu uvedeného cieľa.

PRÍLOHA

V známej sústave štyroch Maxwellovych rovníc (napr. literatúra [5]) vystupujú zvyčajne štyri vektory poľa. Napíšme MR pre vákum (bez prítomnosti vodivostných prúdov a elektrických nábojov)! V uvedenom prípade je postačujúce pracovať len s dvomi vektormi poľa, napríklad s vektorom intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ a s vektorom intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$

$$\varepsilon_0 . \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = rot\vec{H} \quad (9) \qquad \mu_0 . \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -rot\vec{E} \quad (10)$$

$$div\vec{E} = 0 \quad (11) \qquad div\vec{H} = 0 \quad (12)$$

Rozpíšme vyjadrenie MR (9, 10) a (11, 12) podľa zložiek vektorov:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (13a) \qquad \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (14a)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (13b) \qquad \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (14b)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (13c) \qquad \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (14c)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (15) \qquad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

Ak za parciálne derivácie vo vzťahoch (13a, 13b, 13c) dosadíme vzťahy (7a, 7b) (a pochopiteľne aj (5b, 5c)) a využijeme aj rovnicu (15) na úpravu rovnice (13a), tak dostaneme transformovaný systém MR (17a, 17b, 17c). Rovnaký postup môžeme urobiť aj pre úpravu rovníc (14a, 14b, 14c) pomocou (7a, 7b, 5b, 5c) a s využitím vzťahu (16) na úpravu (14a). V tomto prípade dostaneme transformovaný systém MR (18a, 18b, 18c):

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t'}(E_x) = \frac{\partial}{\partial y'}\left[\beta\left(H_z - v.\varepsilon_0 E_y\right)\right] - \frac{\partial}{\partial z'}\left[\beta\left(H_y + v.\varepsilon_0 E_z\right)\right] \quad (17a)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t'}\left[\beta\left(E_y - v.\mu_0 H_z\right)\right] = \frac{\partial}{\partial z'}(H_x) - \frac{\partial}{\partial x'}\left[\beta\left(H_z - v.\varepsilon_0 E_y\right)\right] \quad (17b)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t'}\left[\beta\left(E_z + v.\mu_0 H_y\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x'}\left[\beta\left(H_y + v.\varepsilon_0 E_z\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y'}(H_x) \quad (17c)$$

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t'}(H_x) = \frac{\partial}{\partial z'}\left[\beta\left(E_y - v.\mu_0 H_z\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y'}\left[\beta\left(E_z + v.\mu_0 H_y\right)\right] \quad (18a)$$

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t'}\left[\beta\left(H_y + v.\varepsilon_0 E_z\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x'}\left[\beta\left(E_z + v.\mu_0 H_y\right)\right] - \frac{\partial}{\partial z'}(E_x) \quad (18b)$$

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t'}\left[\beta\left(H_z - v.\varepsilon_0 E_y\right)\right] = \frac{\partial}{\partial y'}(E_x) - \frac{\partial}{\partial x'}\left[\beta\left(E_y - v.\mu_0 H_z\right)\right] \quad (18c)$$

Posledné dve trojice rovníc (17) a (18) budú plne symetrické k rovniciam (13) a (14) ak za zložky vektorov poľa v „čiarkovanej" sústave $\mathbf{k}'$ budeme považovať veličiny:

$$E'_x = E_x \qquad (19a) \qquad H'_x = H_x \qquad (20a)$$
$$E'_y = \beta\left(E_y - v.\mu_0 H_z\right) \qquad (19b) \qquad H'_y = \beta\left(H_y + v.\varepsilon_0 E_z\right) \qquad (20b)$$
$$E'_z = \beta\left(E_z + v.\mu_0 H_y\right) \qquad (19c) \qquad H'_z = \beta\left(H_z - v.\varepsilon_0 E_y\right) \qquad (20c)$$

Rovnice (19) a (20) predstavujú transformáciu zložiek vektorov poľa a môžeme ich elegantnejšie vyjadriť vo vektorovom tvare:

$$\vec{E}' = \begin{vmatrix} E_x \\ \beta.E_y \\ \beta.E_z \end{vmatrix} + \beta.\mu_0 \vec{v} \times \vec{H} \quad (21) \qquad \vec{H}' = \begin{vmatrix} H_x \\ \beta.H_y \\ \beta.H_z \end{vmatrix} - \beta.\varepsilon_0 \vec{v} \times \vec{E} \quad (22)$$

Podobne môžeme transformovať veličiny pozorované v sústave **k**´ do „nečiarkovaných" veličín v sústave **K** :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E'_x \\ \beta.E'_y \\ \beta.E'_z \end{vmatrix} - \beta.\mu_0 \vec{v} \times \vec{H}' \quad (23) \qquad \vec{H} = \begin{vmatrix} H'_x \\ \beta.H'_y \\ \beta.H'_z \end{vmatrix} + \beta.\varepsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}' \quad (24)$$

V článku použité výrazy (8a) a (8b) sú odvodené z posledných dvoch rovníc (23, 24) v prípade, ak v „čiarkovanej„ sústave položíme zložky vektora intenzity magnetického poľa rovné nule. Je to „náš" prípad, transformujeme elektrostatické pole.

LITERATÚRA

[1] Einstein A., Annalen der Physik und Chemie, Jg. 17, 1905, p. 891–921
Práca je prístupná na adrese http://en.wikibooks.org/wiki/ www.A_ Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper_ Kommentiert und erläutert

[2] Haňka Ladislav, Elektrodynamika a pohyb, Academia, Praha 1988

[3] Franek J., Kollár M., Sto rokov teórie relativity, AMTEE 1995, Plzeň, ČR

[4] Franek J., Príklady z elektromagnetického poľa v Mathcade, E-kniha umiestnená pod adresou http://www.mathcad.com/library/Electronic_Books/

[5] Jakson J. D., Classical Elektrodynamics, John Wiley & Sons, Inc. 1962, (jestvuje aj ruský preklad: Klasičeskaja elektrodynamika, Mir 1965)