

# NUMERICKÉ METÓDY – III NUMERICAL METHODS - III

Dušan Maga

*Fakulta mechatroniky TnUAD, Študentská 1, 911 50 Trenčín  
maga@yhman.tuni.sk*

**Abstrakt** Tento príspevok si kladie za cieľ podať čitateľovi čo najjednoduchší pohľad na jednu z troch najznámejších numerických metód – Metódu hraničných prvkov (MHP). Kým však po preštudovaní predchádzajúcich súvisiacich príspevkov bolo možné zostrojiť adekvátny systém doslova „na papieri“, relatívne komplikované integračné formulácie MHP pravdepodobne čitateľa k tomuto kroku nepustia. Napriek tomu dúfame, že princípy aj tejto metódy budú formulované jasne a zrozumiteľne.

**Summary** This contribution deals with giving a possible most simplified view on one of the most frequently used numerical methods – Boundary Element Method (BEM). However, after reading the previous related papers the reader would be able to realize the adequate model by-hand, this time the relative complicate integral formulations probably will not allow to do the same. In spite of this we hope that the principles of this method will also be presented clearly and could be understand.

## 1. ÚVOD

V predchádzajúcich príspevkoch venovaných numerickým metódam bolo popísané riešenie Poissonovej rovnice použitím Metódy konečných diferencií ako aj Metódy konečných prvkov, ktoré sú založené na princípe komplexnej diskretizácie zadanej úlohy. K takýmto riešeniam viedol tzv. diferenciačný prístup, princípom ktorého bolo delenie celej skúmanej domény do konečného počtu prvkov, cez ktoré bude hľadané riešenie danej úlohy. Je tu však možný aj iný prístup a to taký, kde bude prvotné riešenie hľadané opäť na konečnom počte prvkov domény, avšak táto nebude diskretizovaná komplexne - do úvahy sa budú brať len ohraničenia jednotlivých častí geometrie modelu. Takýto postup vedie k použitiu integračnej formulácie. Dostávame sa k typu riešenia, kde bude potrebné diskretizovať len aktívne materiálové oblasti, čo samozrejme, povedie k zníženiu rozmerov matice matematickej formulácie systému. Pre 2D úlohy to bude kvázi 1D model (čiary ohraničujúce dôležité plochy modelu – obr. 1), alebo napríklad pre 3D to bude 2D model (plochy ohraničujúce dôležité objemy modelu).

## 2. METÓDA HRANIČNÝCH PRVKOV

Pri prvotnej formulácii úlohy vychádzajme opäť z predpokladu založenia fyzikálnych princípov riešenia na báze Metódy vážených zvyškov. Hľadáme pritom riešenie Poissonovej rovnice na doméne  $\Omega$  ohraničenej povrchom (okrajom)  $\Gamma$ . Potenciál  $U$  teda musí spĺňať rovnicu:

$$\nabla \cdot \kappa \nabla U + Q = 0 \quad (1)$$

Pre potrebu tejto metódy je nutné definovanie okrajových podmienok na ohraničení úlohy (obr. 1) ako:

$$U = \bar{u} \quad \text{pre } U \text{ na } \Gamma_1 \quad (2)$$

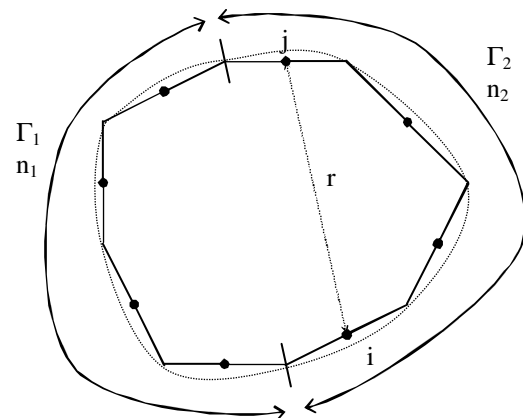
alebo:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \quad \text{pre } U \text{ na } \Gamma_2 \quad (3)$$

pričom (zdanlivo samozrejmu) nutnou podmienkou pre nájdenie riešenia je:

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (4)$$

Metóda vážených zvyškov, pri materiáloch s konštantným parametrom  $\kappa$ , aplikovaná na rovnicu (1) vedie k nasledovnej formulácii úlohy:



*Obr. 1. – Princíp diskretizácie MHP.  
Fig. 1. – Discretisation Principles of BEM.*

$$\int_{\Omega} w_i (\kappa \nabla^2 U - Q) d\Omega = 0 \quad (5)$$

Pridaním vhodne zvolených dodatočných nulových (!) členov do predchádzajúcej rovnice [1] bude zostrojená rovnica, ktorej ďalšie úpravy budú viesť k želanému tvaru:

$$\int_{\Omega} w_i (\kappa \nabla^2 U - Q) d\Omega + \int_{\Gamma_1} \bar{w}_i (U - \bar{u}) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{w}_i \left( \frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \quad (6)$$

kde  $\bar{w}_i, w_i, \bar{w}_i$  sú ľubovoľné váhové funkcie, aj keď realita je taká, že ich vzájomné previazanie pri hľadaní riešenia len pomôže. Opakovaným (dvojnásobným) pretransformovaním prvého člena v rovnici (2.146) pomocou druhej Greenovej vety dostávame:

$$\kappa \int_{\Omega} w_i \nabla^2 U d\Omega = \kappa \int_{\Omega} U \nabla^2 w_i d\Omega + \kappa \int_{\Gamma} w_i \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma - \kappa \int_{\Gamma} U \frac{\partial w_i}{\partial n} d\Gamma \quad (7)$$

Váhové funkcie, ako už bolo spomenuté vyššie, je možné voliť takmer ľubovoľne, k cieľu sa však dostaneme oveľa jednoduchšie ak:

$$\bar{w}_i = \kappa \frac{\partial w_i}{\partial n} \quad (8)$$

a

$$\bar{w}_i = -\kappa w_i \quad (9)$$

Potom dostávame z (6):

$$\int_{\Omega} U \nabla^2 w_i d\Omega - \int_{\Omega} w_i \frac{Q}{\kappa} d\Omega = - \int_{\Gamma_2} w_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} w_i \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial w_i}{\partial n} U d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w_i}{\partial n} \bar{u} d\Gamma \quad (10)$$

Integrál po okraji je pritom rozdelený podľa rovnice (4). Stručne naznačené, platí:

$$\int_{\Gamma} d\Gamma = \int_{\Gamma_1} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} d\Gamma \quad (11)$$

Výsledným efektom celej tejto transformácie je nutnosť integrácie neznámej veličiny  $U$  namiesto derivovania váhovej funkcie  $w$ . Teraz je nutná voľba takej funkcie  $w$ , aby plošné integrály v rovnici (10) bolo možné vypočítať. Dá sa ukázať [2, 4], že vhodným riešením pre 3D úlohy je

$$w = \frac{1}{4\pi r} \quad (12)$$

Pre 2D úlohy:

$$w = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (13)$$

Pri takomto postupe sa však vyskytuje ešte jeden problém, ktorý na prvý pohľad vôbec nemusí byť zrejmy. Použitím takto definovaných funkcií a integrovaním pre  $r \neq 0$  a následným použitím limity pre  $r=0$  sa totiž v rovnici objavuje dodatočný výraz o hodnote  $U/2$ . Tento problém sa teda týka len samotného ohraničenia úlohy. V návaznosti na tento fakt dostávame:

$$cU_i + \int_{\Omega} w_i \frac{Q}{\kappa} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w_i}{\partial n} \bar{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial w_i}{\partial n} U d\Gamma = \int_{\Gamma_1} w_i \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} w_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} d\Gamma \quad (14)$$

kde parameter  $c=1$  pre bod vo vnútri domény a  $c=0.5$  pre bod na ohraničení. Týmto je eliminovaný vplyv dodatočného výrazu  $U/2$  na ohraničení domény. Výskyt prvku  $cU_i$  v rovnici (14) je založený na výsledku integrálu na ľavej strane rovnice (7), pričom treba brať na zreteľ fakt, že funkcia  $w_i$  pre daný prípad spĺňa podmienky Diracovej delta funkcie  $\delta_i$  pre bod  $i$ . Diskretizácia rovnice (14) na ohraničení domény je následne daná ako:

$$\frac{1}{2} U_i + B_i + \sum_j^n U_j \int_{\Gamma} \frac{\partial w_i}{\partial n} d\Gamma = \sum_j^n \frac{\partial U_j}{\partial n} \int_{\Gamma} w_i d\Gamma \quad (15)$$

pre  $i = 1, \dots, n$ , kde  $B_i$  je člen, v ktorom je zahrnutý vplyv zdrojov poľa, t. j. plošný integrál na ľavej strane rovnice (14).

Je nutné doplniť ešte komentár k metóde samotnej a hlavne k predchádzajúcej rovnici. Metóda je založená na zohľadnení vplyvu **všetkých** hraničných elementov na ľubovoľný z nich, čo je zachytené práve v spomenutej rovnici. Do rovnice pre  $i$ -ty prvok vstupujú koeficienty zo všetkých ostatných prvkov, podchytené cez index  $j$ . V návaznosti na toto tvrdenie je namiesto otázky ekonomiky systému MHP. V súlade s úvodom tohto príspevku, MHP znižuje o jeden rád formuláciu úlohy, avšak v porovnaní s metódami prezentovanými v predchádzajúcich príspevkoch, výskyt nulových prvkov v hlavnej matici už nebude pravidlom, ale skôr výnimkou, resp. náhodným javom. Rovnicu (15) je možné prepísať pre každý jeden uzol siete, výsledkom bude sústava rovníc:

$$B_i + \sum_{i,j}^n H_{ij} U_j = \sum_{i,j}^n G_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial n} \quad (16)$$

pričom

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial w_i}{\partial n} d\Gamma + \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (17)$$

kde  $\delta_{ij}$  je jednotková Diracová funkcia pre bod  $i=j$  (t. j. rovná jednotke pre  $i=j$  a rovná nule pre  $i \neq j$ ) a

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} w_i d\Gamma \quad (18)$$

Kvôli jednoznačnému riešeniu sa musí počet neznámych zhodovať s počtom rovníc, čo na prvý pohľad nemusí sedieť, lebo k dispozícii je  $n$  rovníc a cez indexy  $i$  a  $j$  dva krát toľko neznámych. Návratom na začiatok kapitoly však zistíme, že  $n_1$  hodnôt  $U$  a  $n_2$  hodnôt  $\partial U/\partial n$  je známych, definovaných práve okrajovými podmienkami úlohy. Systém rovníc obsahuje presne  $n$  neznámych! Po vzhliadnutí matematickej formulácie konkrétnej úlohy (20) dostávame v podstate opäť sústavu rovníc typu  $A \cdot U = B$ .

Matica systému prezentovaná napr. v rovnici (20), na rozdiel od matice Metódy konečných prvkov, je nesymetrická a všeobecne vzaté, neobsahuje nulové členy. Zaujímavá je, ako už bolo spomenuté vyššie, otázka úspory výpočtového času systému. V porovnaní s diferenciálnymi schémami (napr. MKP alebo MKD) je síce o jeden rád znížená komplexnosť úlohy, ale práve kvôli nesymetrii celého systému matíc a kvôli prakticky absencii nulových prvkov môže byť výpočet takejto sústavy oveľa náročnejší ako pri MKP alebo MKD.

Dôležitým je aj krok vyčísl'ovania koeficientov  $G$  a  $H$  (ako aj koeficientov  $B$ ). Ich hodnoty vo všeobecnosti nie je možné určiť len na základe súradníc uzlov siete pomocou jednoduchých matematických operácií (násobenie, delenie, sčítanie, odčítanie). Nastupujú zložité integrálne počtu, pri ktorých je neraz potrebné vyčísl'it' aj hodnoty týchto koeficientov numericky.

Vráťme sa však k úlohe MHP. Riešením sústavy rovníc MHP, pri známych koeficientoch  $G$ ,  $H$  (prípadne  $B$ ) napríklad Gaussovou eliminačnou metódou a pod., sú hodnoty  $U$  a  $\partial U/\partial n$  na celom ohraničení úlohy  $\Gamma$ . Potrebné je poznať ešte hodnoty funkcie  $U$  v bodoch vo vnútri skúmanej domény. K týmto sa dá pomerne jednoducho dopracovať podľa predpisu definovaného rovnicou (14). Pre ľubovoľný bod vo vnútri domény  $\Omega$  teda dostávame:

$$U_{\text{int}} = \sum_{i,j}^n G_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial n} - \sum_{i,j}^n H_{ij} U_j - B_i \quad (19)$$

### 3. PRÍKLAD FORMULÁCIE PROBLÉMU MHP

Riešenie konkrétnej úlohy si ukážeme na príklade prúdovodiča podľa obr. 2. Vhodným formulovaním okrajových podmienok sa vyhneme potrebe vyčísl'ovania koeficientov  $B_i$ :

$$U = \mu_r \mu_0 J \frac{a^2}{2} \quad \text{pre } x = a$$

$$U = \mu_r \mu_0 J \frac{b^2}{2} = \mu_r \mu_0 J \frac{a^2}{2} \quad \text{pre } y = b$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{pre } x = 0$$

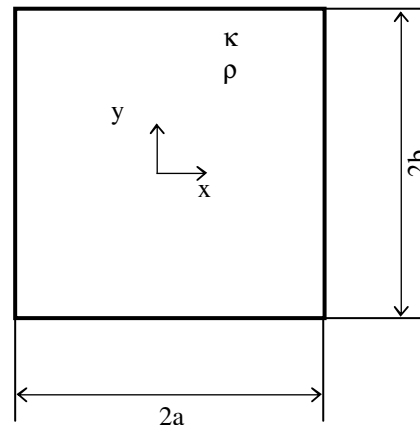
$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{pre } y = 0$$

kde jednotlivé použité symboly sú v zhode so všeobecnými pravidlami pre daný vedný odbor.

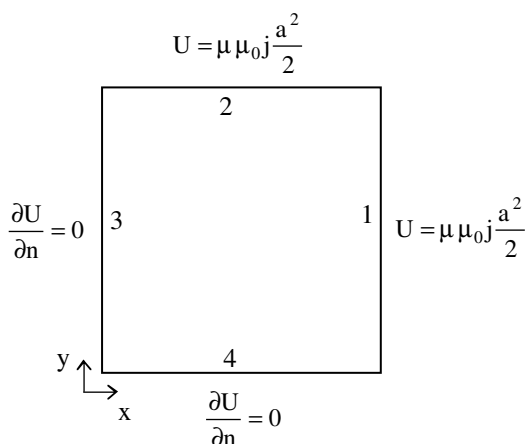
Jednoduchá diskretizačná schéma pre rozmery  $2a=2b$  je prezentovaná na obr. 3. Matica systému pre takto definovanú úlohu je nasledovná:

$$\begin{bmatrix} -G_{11} & -G_{12} & H_{13} & H_{14} \\ -G_{21} & -G_{22} & H_{23} & H_{24} \\ -G_{31} & -G_{32} & H_{33} & H_{34} \\ -G_{41} & -G_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} \\ \frac{\partial U_3}{\partial y} \\ U_4 \end{bmatrix} = -\frac{\mu_r \mu_0 a^2}{2} \begin{bmatrix} H_{11} + H_{12} \\ H_{21} + H_{22} \\ H_{31} + H_{32} \\ H_{41} + H_{42} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Výsledky (aj číselné) pre rozličné počty elementov a pre dva rozličné pomery šírky  $a$  a výšky  $b$  koaxiálneho vodiča sú uvedené v [1, 4].



Obr. 2. – Riešený prúdovodič.  
Fig. 2. – Solved Conductor.



Obr. 3. Prvý kvadrant prúdovodiča s definovanými okrajovými podmienkami.  
Fig. 3. First Quadrant of Conductor with Defined Boundary Conditions.

#### 4. ZÁVER

Metóda hraničných prvkov v porovnaní s Metódou konečných prvkov ponúka redukovanie systému o jeden rád. Prakticky to znamená redukovanie priestoru potrebného na archiváciu vstupných dát systému. Napriek tomu sa v integračnej formulácii nevyhne náročnému vyhodnocovaniu koeficientov matic, čo v končnom dôsledku môže viesť k predĺženiu výpočtového času. K podobnému javu môže dôjsť pri presnutí potreby poznania hodnôt hľadanej veličiny vo vnútri skúmanej domény na postprocesor. Problematickým je aj absencia nenulových prvkov v maticiach systému, čo sťažuje použitie kompresných metód pri archivácii alebo riešení sústav.

Vynechaná v tomto príspevku je aj problematika prepájanie regiónov pomocou systému MHP. Podobne, problémom sa javí aj použitie materiálov s nelineárnymi materiálovými charakteristikami. Metóda však dokonale eliminuje nevýhodu konečných prvkov a to previazanosť geometrie na model samotný. Riešitelia, hlavne úloh z oblasti

strojov točivých, poznajú problém MKP, kde akákoľvek zmena polohy (geometrie) znamená postavenie nového modelu a opätovný výpočet. Aj keď väčšina sofistikovaných MKP softvérov ponúka automatické presieťovanie úlohy pri požadovaných zmenách (rotácia rotora a pod.), diskutabilným ostáva kompatibilita riešených modelov, prípadne mrhanie prvkami pri potrebe dosiahnutia výsledkov s dostatočnou presnosťou.

Riešením sa ukazuje moderná kombinácia MKP a MHP, keď regióny sú vzájomne previazané pomocou systému hraničných prvkov a nelinearity systému sú podchytené konečnými prvkami.

#### LITERATÚRA

- [1] D. Maga, R. Hart'anský: Numerické metódy riešenia elektromechanických úloh, Trenčianska univerzita, Eudoprint Trenčín, 2001, ISBN 80-88914-29-9
- [2] D. Maga: Numerical Methods – I, Advances in Electrical and Electronic Engineering, No. 4, Vol. 3/2004, ISSN 1336-1376, pp. 14 – 17
- [3] D. Maga: Numerical Methods – II, Advances in Electrical and Electronic Engineering, ISSN 1336-1376, - in press
- [4] K. J. Binns, P. J. Lawrenson, C. W. Trowbridge: The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Fields, Wiley Publishers, 1992, ISBN 0-471-96242-2
- [5] D. Mayer, J. Polák: Metódy řešení elektrických a magnetických polí, SNTL Alfa Praha, 1993
- [6] H. J. Bartsch: Matematické vzorce, SNTL Praha, 1993
- [7] J. Polák: Variační principy a metody teorie elektromagnetického pole, Academia Praha, 1988
- [8] Rektorys: Variační problémy v inženýrských úlohách a úlohách matematické fyziky, SNTL Praha, 1974