GRAFICKÁ REPREZENTÁCIA ATOMICKÝCH D-POSETOV
GRAPHICAL REPREZENTATION OF ATOMIC D-POSETS

Ferdinand Chovanec, Eva Drobná

Katedra matematiky, Vojenská akadémia v Liptovskom Mikuláši
P. O. BOX 45, 031 01 Liptovský Mikuláš

Abstrakt V článku je ukázaná konštrukcia D-posetov metódou zlepovania MV-algebier a ich grafická reprezentácia pomocou Haaseho a Greechieho diagramov.

Summary In the present paper is shown a construction of D-posets using of the method of the MV-algebra pasting and their graphical representation by Haase and Greechie diagrams.

1. ÚVOD

Greechie [1] ako prvý zaviedol v teórii kvantových logík techniku konštrukcie ortomodulárnych zväzov resp. posetov (OMZ, resp. OMP) metódou *zlepovania* Booleových algebier. Takto vzniknuté štruktúry sa nazývajú *Greechieho logiky.* V Greechieho logike Booleove algebry [2] tvoria *bloky*, t.j. maximálne množiny navzájom kompatibilných prvkov, pričom prienik ľubovoľných dvoch blokov (Booleových algebier) obsahuje najviac jeden spoločný atóm.

Kôpka a Chovanec [3] pri štúdiu nekomutatívnej teórie pravdepodobnosti definovali algebraickú štruktúru nazvanú *D-poset* (z angl. *difference poset*), v ktorej základnou operáciou je čiastočná binárna operácia *rozdielu porovnateľných prvkov.* Súčasne, ale nezávisle od vzniku D-posetov, Foulis a Bennetová [4] navrhli kategoriálne ekvivalentnú algebraickú štruktúru s názvom *efektová algebra*, kde základnou operáciou je čiastočná binárna operácia *súčtu ortogonálnych prvkov*.

D-posety (efektové algebry) sú zovšeobecnením Booleových algebier, kvantových logík (OMZ, OMP) [5], ortoalgebier [6], ako aj MV-algebier [7]. MV-algebry hrajú v mnohohodnotových logikách analogickú úlohu ako Booleove algebry v dvojhodnotových logikách a z hľadiska D-posetov ich môžeme charakterizovať ako D-zväzy (t.j. zväzovo usporiadané D-posety) po dvojiciach kompatibilných prvkov (viď [8]).

Riečanová [9] dokázala, že každý D-zväz je zjednotením blokov, ktorými sú maximálne množiny po dvojiciach kompatibilných prvkov, teda maximálne pod-MV-algebry. Tým vznikol duálny problém konštrukcie D-posetov z daného systému MV-algebier. Vyriešený bol v [10], pričom bola použitá technika zlepovania MV-algebier. Na rozdiel od Greechieho metódy, prienik blokov tu môže obsahovať viac než jeden atóm. V tomto článku predstavíme geometrickú reprezentáciu takýmto spôsobom vzniknutých D-posetov a to prostredníctvom Hasseho a Greechieho diagramov.

2. ZÁKLADNÉ POJMY A TVRDENIA

Nech $\mathcal{P}$ je čiastočne usporiadaná množina (poset) s najmenším prvkom $0_{\mathcal{P}}$ a najväčším prvkom $1_{\mathcal{P}}$, nech $\spadesuit$ je čiastočná binárna operácia na $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ taká, že prvok $b \spadesuit a$ existuje práve vtedy, keď $a \bullet b$, pričom platia nasledujúce axiomy:

(D1) $a \spadesuit 0_{\mathcal{P}} = a$ pre každé $a \in \mathcal{P}$.

(D2) Ak $a \bullet b \bullet c$, potom $c \spadesuit b \bullet c \spadesuit a$ a navyše $(c \spadesuit a) \spadesuit (c \spadesuit b) = b \spadesuit a.$

Štruktúra $(\mathcal{P}, \bullet, \spadesuit, 0_{\mathcal{P}}, 1_{\mathcal{P}})$ sa nazýva *D-poset* a kvôli stručnosti ho budeme označovať rovnako ako nosnú množinu $\mathcal{P}$. Ak D-poset je zväz, nazývame ho D-zväz. Hovoríme, že D-poset je *σ-úplný*, ak každá spočítateľná postupnosť $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \subseteq \mathcal{P}$ má v $\mathcal{P}$ suprémum a infímum.

Prvok $1_{\mathcal{P}} \spadesuit a$ nazývame *ortosuplement* prvku a a označujeme ho $a^{\perp}$. Unárna operácia $\perp$: $a \;\alpha\; a^{\perp}$ je involúcia ($a^{\perp\perp} = a$) a antiizotónna ($a \bullet b \Rightarrow b^{\perp} \bullet a^{\perp}$), ale nie je ortokomplementácia, lebo vo všeobecnosti neplatí $a^{\perp} \vee a = 1_{\mathcal{P}}$, resp. $a^{\perp} \wedge a = 0_{\mathcal{P}}$.

Duálnou operáciou k operácii $\spadesuit$ je operácia súčtu ortogonálnych prvkov $\oplus$ definovaná pre $b \bullet a^{\perp}$ predpisom

$$a \oplus b = (a^{\perp} \spadesuit b)^{\perp}.$$

Konečná postupnosť $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathcal{P}$ sa nazýva $\oplus$−ortogonálna, ak $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n$ existuje v $\mathcal{P}$, pričom

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = (a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_{n-1}) \oplus a_n,$$

za predpokladu, že $(a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_{n-1})$ aj $(a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_{n-1}) \oplus a_n$ existujú v $\mathcal{P}$.

Prvky $a, b \in \mathcal{P}$ sú *kompatibilné* ($a \leftrightarrow b$), ak existujú prvky $c, d \in \mathcal{P}$, že $d \bullet a \bullet c$, $d \bullet b \bullet c$ a

$$c \spadesuit a = b \spadesuit d.$$

Ak $\mathcal{P}$ je D-zväz, potom $a \leftrightarrow b$ práve vtedy keď

$$(a \vee b) \spadesuit a = b \spadesuit (a \wedge b).$$

Kôpka [11] študujúc kompatibilné množiny v D-posetoch definoval *booleovský D-poset* ako ohraničený poset $\mathcal{P}$ s najmenším prvkom $0_{\mathcal{P}}$, najväčším prvkom $1_{\mathcal{P}}$ a binárnou operáciou "–" spĺňajúcou axiomy:

(BD1) $a - 0_{\mathcal{P}} = a$ pre všetky $a \in \mathcal{P}$.

(BD2) $a - (a - b) = b - (b - a)$ pre všetky $a, b \in \mathcal{P}$.

(BD3) Ak $a \bullet b$, potom $c - b \bullet c - a$ pre každé $c \in \mathcal{P}$.

(BD4) $(a - b) - c = (a - c) - b$ pre všetky $a, b, c \in \mathcal{P}$.

V [8] bolo dokázané, že booleovský D-poset je D-zväz po dvojiciach kompatibilných prvkov a naopak.

(Pripomeňme, že ortomodulárny zväz po dvojiciach kompatibilných prvkov je Booleova algebra).

Veľmi dôležitým príkladom distributívneho zväzu je MV-algebra.

MV-algebra je štvorica ($\mathcal{A}$, $+$, $*$, $0_{\mathcal{A}}$, $1_{\mathcal{A}}$), kde $\mathcal{A}$ je neprázdna množina, $0_{\mathcal{A}}$ a $1_{\mathcal{A}}$ sú špeciálne prvky z $\mathcal{A}$, $+$ je binárna operácia a $*$ je unárna operácia na $\mathcal{A}$, pričom platia nasledujúce axiomy:

(MVA1) $a + b = b + a$.
(MVA2) $(a + b) + c = a + (b + c)$.
(MVA3) $a + 0_{\mathcal{A}} = a$.
(MVA4) $a + 1_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$.
(MVA5) $(a^*)^* = a$.
(MVA6) $0_{\mathcal{A}}^* = 1_{\mathcal{A}}$.
(MVA7) $a + a^* = 1_{\mathcal{A}}$.
(MVA8) $(a^* + b)^* + b = (a + b^*)^* + a$.

Ak pre $a, b2\,\mathcal{A}$ definujeme

$$a \vee b = (a^* + b)^* + b,$$
$$a \wedge b = (a^* \vee b^*)^*,$$
$$a \bullet b, \text{ ak } a \vee b = b,$$

potom $\mathcal{A}$ je distributívny zväz s najmenším prvkom $0_{\mathcal{A}}$ a najväčším prvkom $1_{\mathcal{A}}$. Ak pre $a, b2\,\mathcal{A}$ položíme

$$a - b = (a^* + b)^*,$$

potom $\mathcal{A}$ je booleovský D-poset.

Naopak, ak ($\mathcal{P}$, $-$, $0_{\mathcal{P}}$, $1_{\mathcal{P}}$) je booleovský D-poset, tak položiac

$$a^* = 1_{\mathcal{P}} - a \ ,$$
$$a + b = (a^* - b)^* \text{ pre } a, b2\,\mathcal{P},$$

dostaneme, že ($\mathcal{P}$, $+$, $*$, $0_{\mathcal{P}}$, $1_{\mathcal{P}}$) je MV-algebra. Booleovské D-posety a MV-algebry sú kategoriálne ekvivalentné štruktúry. V tomto článku budeme uprednostňovať pojem MV-algebry.

Nenulový prvok a z D-posetu $\mathcal{P}$ sa nazýva *atóm*, ak z nerovnosti $b \bullet a$ vyplýva buď $b = 0_{\mathcal{P}}$ alebo $b = a$. D-poset je *atomický*, ak ku každému nenulovému prvku $b \in \mathcal{P}$ existuje atóm $a \in \mathcal{P}$, že $a \bullet b$.

Nech $\mathcal{N}$ je množina prirodzených čísiel. *Ortogonálny násobok* prvku $a \in \mathcal{P}$ definujeme rekurentným spôsobom takto:

(i) $0a = 0_{\mathcal{P}}$.
(ii) $1a = a$.
(iii) $na = (n-1)a \oplus a$, ak $(n-1)a \bullet a^{\perp}$, $n \in \mathcal{N}$, $n \geq 2$.

Maximálne $n \in \mathcal{N}$ také, že prvok na existuje v $\mathcal{P}$ nazývame *izotropický index* prvka a a označujeme ho $\tau(a)$. Ak prvok na existuje pre každé $n \in \mathcal{N}$, potom $\tau(a) = \infty$. MV-algebra je Booleovou algebrou práve vtedy, keď izotropický index každého prvka je rovný číslu 1.

Nech $\mathcal{A}$ je atomická MV-algebra. Symbolom $\langle \mathcal{A} \rangle$ budeme označovať množinu všetkých atómov MV-algebry $\mathcal{A}$ a symbolom $|A|$ kardinalitu množiny A, $A \subseteq \langle \mathcal{A} \rangle$.

Nech $\mathcal{S} = \{\mathcal{A}_t$: $t \in T$, T je indexová množina$\}$ je systém atomických σ-úplných MV-algebier. Nech A a B sú konečné množiny atómov, $A \subseteq \langle \mathcal{A}_t \rangle$, $B \subseteq \langle \mathcal{A}_s \rangle$ pre $t \neq s$, pričom $|A| = |B|$. Hovoríme, že množiny A, B sú *ekvivalentné vzhľadom na izotropické indexy*, píšeme $A \approx_\tau B$, ak platí jedna z nasledujúcich podmienok:

(E1) $A = \emptyset$ a $B = \emptyset$.
(E2) Ak $a \in A$, potom existuje $b \in B$, že $\tau(a) = \tau(b)$. Navyše, ak $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, potom existujú atómy $b_1, b_2 \in B$, že $\tau(a_1) = \tau(b_1)$, $\tau(a_2) = \tau(b_2)$ a $b_1 \neq b_2$.

Z každej dvojice MV-algebier $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathcal{S}$ vyberieme dvojicu množín A a B tak, že $A \subset \langle \mathcal{A} \rangle$, $B \subset \langle \mathcal{B} \rangle$ a $A \approx_\tau B$. Budeme hovoriť, že $\mathcal{S}$ je *prípustný systém* MV-algebier, ak pre ľubovoľné tri MV-algebry $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C} \in \mathcal{S}$ platí:

(PS1) Ak $A \subset \langle \mathcal{A} \rangle$, $B \subset \langle \mathcal{B} \rangle$ a $A \approx_\tau B$, potom $\langle \mathcal{A} \rangle - A \neq \emptyset$ a $\langle \mathcal{B} \rangle - B \neq \emptyset$. Ak $\langle \mathcal{A} \rangle - A = \{a\}$, resp. $\langle \mathcal{B} \rangle - B = \{b\}$, potom $\tau(a) > 1$ aj $\tau(b) > 1$.
(PS2) Ak $A_1, A_2 \subseteq \langle \mathcal{A} \rangle$, $B_1, B_2 \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$, $C_1, C_2 \subseteq \langle \mathcal{C} \rangle$, pričom $A_1 \approx_\tau B_1$, $A_2 \approx_\tau C_1$, $B_2 \approx_\tau C_2$, potom $\langle \mathcal{A} \rangle - (A_1 \cup A_2) \neq \emptyset$, $\langle \mathcal{B} \rangle - (B_1 \cup B_2) \neq \emptyset$ a $\langle \mathcal{C} \rangle - (C_1 \cup C_2) \neq \emptyset$.

Relácia ekvivalencie vzhľadom na izotropické indexy $\approx_\tau$ indukuje na zjednotení prípustného systému MV-algebier reláciu ekvivalencie $\sim$, ktorá je definovaná nasledujúcim spôsobom:

(i) $0_{\mathcal{A}} \sim 0_{\mathcal{B}}$ a $1_{\mathcal{A}} \sim 1_{\mathcal{B}}$, ak $A = \emptyset$ a $B = \emptyset$.
(ii) Ak $x, y \in \mathcal{A}$, tak $x \sim y$ práve vtedy keď $x = y$.
(iii) Ak $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{B}$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, pričom $A \approx_\tau B$, tak $x \sim y$, keď

$$x = \bigvee_{i=1}^{n} p_i a_i \ \text{ a } \ y = \bigvee_{i=1}^{n} p_i b_i,$$

kde $p_i \in \{0, 1, \ldots, \tau(a_i)\}$, $i = 1, \ldots, n$.
(iv) Ak $x \sim y$, potom $x^{\perp} \sim y^{\perp}$.

Označme $[x] = \{y \in \mathrm{Y}_{t \in T} \mathcal{A}_t$: $y \sim x\}$ a položme

$$\mathcal{P} = \{[x]: x \in \mathrm{Y}_{t \in T} \mathcal{A}_t\}.$$

Ak ďalej označíme $[\mathcal{A}_t] = \{[x]: x \in \mathcal{A}_t\}$, potom

$$\mathcal{P} = \mathrm{Y}_{t \in T} [\mathcal{A}_t].$$

Systém $\mathcal{P}$ nazývame *zlepenie MV-algebier.*

Na $\mathcal{P}$ definujeme reláciu $\bullet$ a operáciu $\spadesuit$ takto:

(i) $[x] \bullet [y]$, ak existuje MV-algebra $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$ a prvky $u, v \in \mathcal{A}$, že $u \in [x]$, $v \in [y]$ a $u \bullet_{\mathcal{A}} v$.
(ii) Ak $[x] \bullet [y]$, potom $[y] \spadesuit [x] = [v \spadesuit_{\mathcal{A}} u]$.

Potom ($\mathcal{P}$, $\bullet$, $\spadesuit$, $0_{\mathcal{P}}$, $1_{\mathcal{P}}$), kde $0_{\mathcal{P}} = [0_{\mathcal{A}}]$, $1_{\mathcal{P}} = [1_{\mathcal{A}}]$, je D-poset.

V [10] bolo dokázané, že zlepenie prípustného systému dvoch MV-algebier je vždy D-zväz a navyše, ak $\mathcal{P} = \mathrm{Y}_{t \in T} [\mathcal{A}_t]$ je D-zväz, potom $[\mathcal{A}_t]$ sú bloky v $\mathcal{P}$.

Inými slovami povedané, prípustný systém je taký systém MV-algebier, ktoré sú schopné zlepenia.

Ľubovoľný systém atomických σ-úplných MV-algebier je prípustný, ak všetky vybrané ekvivalentné množiny atómov sú prázdne množiny. V tomto prípade sú ekvivalentnými prvkami jedine najmenšie, respektívne najväčšie prvky MV-algebier a vtedy hovoríme o tzv. *0 -1-zlepení*.

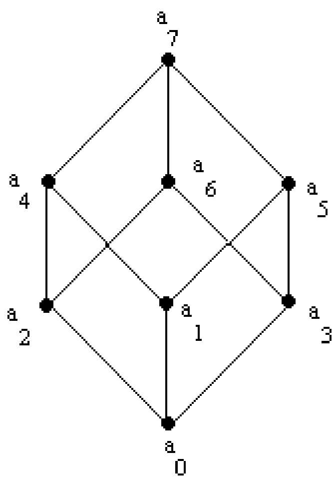
3. HAASEHO DIAGRAMY

Haaseho diagram je orientovaný graf, ktorého vrcholy tvoria prvky čiastočne usporiadanej množiny (posetu) a hrany sú úsečky spájajúce vrcholy, pričom platia nasledujúce princípy:

(i) Ak x, y sú porovnateľné prvky, napr. $x < y$, potom vrchol odpovedajúci prvku x leží v grafe nižšie než vrchol odpovedajúci prvku y.

(ii) Ak hrana spája vrcholy odpovedajúce prvkom x a y, pričom $x < y$, potom neexistuje žiadny prvok z z daného posetu, aby $x < z$ a $z < y$.

Na obr. 1 je Haaseho diagram čiastočne usporiadanej množiny obsahujúcej osem prvkov. Z diagramu vidieť, že $a_0 < a_2$ a na základe tranzitívnosti tiež $a_0 < a_4$, $a_0 < a_7$. Prvky a_1 a a_3 sú neporovnateľné, podobne a_4 a a_6, a_2 a a_5. Najväčším prvkom je a_7 a najmenším a_0.



Obr. 1

Príklad 1. Nech $\mathcal{A}=\{a_0, a_1, \dots, a_7\}$, $a_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$, $a_1 = (0, 0, 1, 0, 0)$, $a_2 = (1, 1, 0, 0, 0)$, $a_3 = (0, 0, 0, 1, 1)$, $a_4 = (1, 1, 1, 0, 0)$, $a_5 = (0, 0, 1, 1, 1)$, $a_6 = (1, 1, 0, 1, 1)$, $a_7 = (1, 1, 1, 1, 1)$. Na $\mathcal{A}$ definujeme (koordinátové) čiastočné usporiadanie:

$$(a_{i1}, a_{12}, a_{i3}, a_{i4}, a_{i5}) \bullet (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, a_{j4}, a_{j5}),$$

ak $a_{ik} \bullet a_{jk}$ pre $i,j \in \{0, 1, \dots, 7\}$, $k = 1, 2, \dots, 5$.

Potom $(\mathcal{A}, \bullet)$ je poset, ktorého Haaseho diagram je na obr. 1. Na posete $\mathcal{A}$ definujeme binárnu operáciu „–" a unárnu operáciu ⊥ takto:

$$(a_{i1}, a_{12}, a_{i3}, a_{i4}, a_{i5}) - (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, a_{j4}, a_{j5}) =$$
$$(a_{i1} - min\{ a_{i1}, a_{j1}\}, \dots, a_{i5} - min\{ a_{i5}, a_{j5}\}),$$
$$a_i^{\perp} = a_7 - a_i, i=1, 2, \dots, 7.$$

Štruktúra $(\mathcal{A}, \bullet, a_0, a_7, -, \perp)$ je distributívny ortomodulárny zväz , teda Booleova algebra.

Príklad 2. Nech $\mathcal{B}=\{b_0, b_1, \dots, b_7\}$, $b_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$, $b_1 = (0, 0, 1, 0, 0)$, $b_2 = (0, 1, 0, 1, 0)$, $b_3 = (1, 0, 0, 0, 1)$, $b_4 = (0, 1, 1, 1, 0)$, $b_5 = (1, 0, 1, 0, 1)$, $b_6 = (1, 1, 0, 1, 1)$, $b_7 = (1, 1, 1, 1, 1)$. Na $\mathcal{B}$ definujeme reláciu • a operácie –, ⊥ ako v Príklade 1. Štruktúra $(\mathcal{B}, \bullet, b_0, b_7, -, \perp)$ je Booleova algebra a jej Haaseho diagram je rovnaký ako Booleovej algebry $\mathcal{A}$ z Príkladu 1. Booleove algebry $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ sú totiž izomorfné.

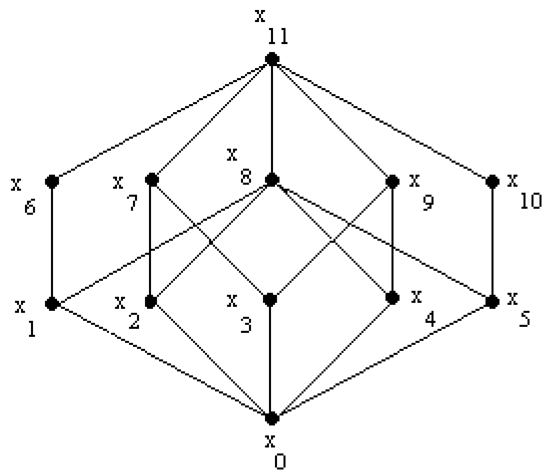
Položme $\mathcal{P} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ a označme $x_0 = a_0 = b_0$, $x_1 = b_2$, $x_2 = a_2$, $x_3 = a_1 = b_1$, $x_4 = a_3$, $x_5 = b_3$, $x_6 = b_4$, $x_7 = a_4$, $x_8 = a_6 = b_6$, $x_9 = a_5$, $x_{10} = b_5$, $x_{11} = a_7 = b_7$. Na $\mathcal{P}$ definujeme reláciu • a operácie –, ⊥ ako vo vyššie uvedených príkladoch. Štruktúra $\mathcal{P}$ nie je Booleova algebra, lebo nie je distributívny zväz. Totiž,

$$(x_1 \vee x_9) \wedge x_5 = x_{11} \wedge x_5 = x_5,$$

ale

$$(x_1 \wedge x_5) \vee (x_9 \wedge x_5) = x_0 \vee x_0 = x_0.$$

$\mathcal{P}$ je ortomodulárny zväz (D-zväz) a hovoríme, že vznikol *zlepením* Booleových algebier $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Jeho Haaseho diagram je na obr. 2.



Obr. 2

Príklad 3. Uvažujme poset $\mathcal{P}$, ktorého Haaseho diagram je na obr. 1. Na $\mathcal{P}$ definujeme čiastočnú binárnu operáciu ♠ takto:

(i) $x \spadesuit a_0 = x$ pre každé $x \in \{a_0, a_1, \dots, a_7\}$.

(ii) $a_4 \spadesuit a_1 = a_2$, $a_4 \spadesuit a_2 = a_1$, $a_6 \spadesuit a_2 = a_2$,
$a_7 \spadesuit a_1 = a_6$, $a_7 \spadesuit a_6 = a_1$, $a_7 \spadesuit a_2 = a_4$,
$a_7 \spadesuit a_4 = a_2$, $a_5 \spadesuit a_1 = a_3$, $a_5 \spadesuit a_3 = a_1$,
$a_6 \spadesuit a_3 = a_3$, , $a_7 \spadesuit a_3 = a_5$, $a_7 \spadesuit a_5 = a_3$,
$a_7 \spadesuit a_7 = a_0$.

Štruktúra $(\mathcal{P}, \spadesuit, a_0, a_7)$ je D-poset, dokonca distributívny D-zväz, ale nie je MV-algebra, lebo prvky a_2 a a_3 nie sú kompatibilné. Totiž,

$$(a_2 \vee a_3) \spadesuit a_2 = a_6 \spadesuit a_2 = a_2,$$
$$a_3 \spadesuit (a_2 \wedge a_3) = a_3 \spadesuit a_0 = a_3.$$

D-zväz $\mathcal{P}$ vznikol zlepením MV-algebier $\mathcal{A}_1 = \{a_0, a_1, a_3, a_5, a_6, a_7\}$ a $\mathcal{A}_2 = \{a_0, a_1, a_2, a_4, a_6, a_7\}$.

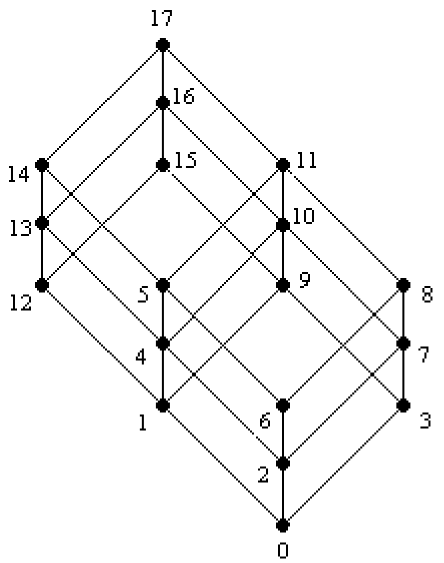
Príklad 4. Nech $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, \dots, a_{17}\}$ a nech $\mathcal{B} = \{b_0, b_1, \dots, b_{17}\}$, pričom $a_0 = (0, 0, 0, 0)$, $a_1 = (1, 0, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0, 0)$, $a_3 = (0, 0, 0,1)$, $a_4 = (1, 1, 0, 0)$, $a_5 = (1, 2, 2, 0)$, $a_6 = (0, 2, 2, 0)$,

$a_7 = (0, 1, 0, 1)$, $a_8 = (0, 2, 2, 1)$, $a_9 = (1, 0, 0, 1)$, $a_{10} = (1, 1, 0, 1)$, $a_{11} = (1, 2, 2, 1)$, $a_{12} = (2, 0, 0, 0)$, $a_{13} = (2, 1, 0, 0)$, $a_{14} = (2\ 2, 2, 0$, $a_{15} = (2\ 0, 0,1)$, $a_{16} = (2, 1, 0, 1)$, $a_{17} = (2, 2, 2, 1)$, $b_0 = (0, 0, 0, 0)$, $b_1 = (1, 0, 0, 0)$, $b_2 = (0, 0, 1, 0)$, $b_3 = (0, 0, 0,1)$, $b_4 = (1, 0, 1, 0)$, $b_5 = (1, 2, 2, 0)$, $b_6 = (0, 2, 2, 0)$, $b_7 = (0, 0, 1, 1)$, $b_8 = (0, 2, 2, 1)$, $b_9 = (1, 0, 0, 1)$, $b_{10} = (1, 0, 1, 1)$, $b_{11} = (1, 2, 2, 1)$, $b_{12} = (2, 0, 0, 0)$, $b_{13} = (2, 0, 1, 0)$, $b_{14} = (2, 2, 2, 0)$, $b_{15} = (2, 0, 0,1)$, $b_{16} = (2, 0, 1, 1)$, $b_{17} = (2, 2, 2, 1)$.

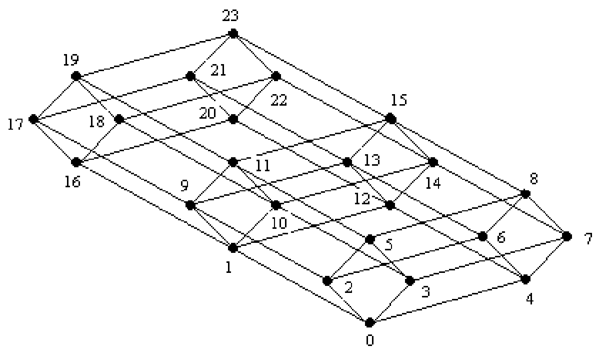
Na $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ definujeme čiastočné usporiadanie a operáciu rozdielu ako v Príklade 1. Potom $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ sú MV-algebry. Na obr. 3 je Haaseho diagram MV-algebry $\mathcal{A}$, resp. $\mathcal{B}$, pretože $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ sú izomorfné. Prvky v diagrame sú kvôli prehľadnosti označené len číslami ich indexov.

Položme $\mathcal{P} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ a označme $x_0 = a_0 = b_0$, $x_1 = a_1 = b_1$, $x_2 = a_2$, $x_3 = b_2$, $x_4 = a_3 = b_3$, $x_5 = a_6 = b_6$, $x_6 = a_7$, $x_7 = b_7$, $x_8 = a_8 = b_8$, $x_9 = a_4$, $x_{10} = b_4$, $x_{11} = a_5 = b_5$, $x_{12} = a_9 = b_9$, $x_{13} = a_{10}$, $x_{14} = b_{10}$, $x_{15} = a_{11} = b_{11}$, $x_{16} = a_{12} = b_{12}$, $x_{17} = a_{13}$, $x_{18} = b_{13}$, $x_{19} = a_{14} = b_{14}$, $x_{20} = a_{15} = b_{15}$, $x_{21} = a_{16}$, $x_{22} = b_{16}$, $x_{23} = a_{17} = b_{17}$.

MV-algebry $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ tvoria prípustný systém a ich zlepenie $\mathcal{P}$ je distributívny D-zväz. Jeho Haaseho diagram je na obr. 4.



Obr. 3



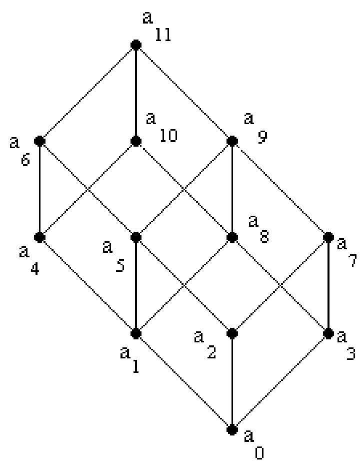
Obr. 4

Príklad 5. Nech $\mathcal{A}=\{a_0, a_1, \ldots, a_{11}\}$ a nech $\mathcal{B} = \{b_0, b_1, \ldots, b_{11}\}$, pričom $a_0 = (0, 0, 0)$, $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1)$, $a_4 = (2, 0, 0)$, $a_5 = (1, 1, 0)$, $a_6 = (2, 1, 0)$, $a_7 = (0, 1, 1)$, $a_8 = (1, 0, 1)$, $a_9 = (1, 1, 1)$, $a_{10} = (2, 0, 1)$, $a_{11} = (2, 1, 1)$, $b_0 = (0, 0)$, $b_1 = (1, 0)$, $b_2 = (0, 1)$, $b_3 = (2, 0)$, $b_4 = (0, 2)$, $b_5 = (0, 3)$, $b_6 = (1, 1)$, $b_7 = (1, 2)$, $b_8 = (1, 3)$, $b_9 = (2, 1)$, $b_{10} = (2, 2)$, $b_{11} = (2, 3)$.

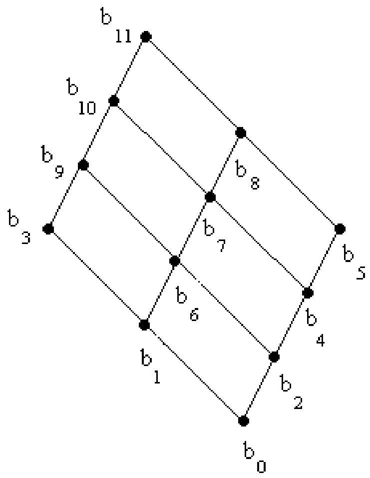
Ak na $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ definujeme čiastočné usporiadanie a operáciu rozdielu ako v Príklade 1, potom $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ sú MV-algebry a ich Haaseho diagramy sú na obr. 5 a obr. 6.

Pre množiny ich atómov $\langle\mathcal{A}\rangle = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\langle\mathcal{B}\rangle = \{b_1, b_2\}$ platí: $\tau(a_1) = 2$, $\tau(a_2) = 1$, $\tau(a_3) = 1$, $\tau(b_1) = 2$, $\tau(b_2) = 3$. Položme $A =\{a_1\}$, $B=\{b_1\}$. Potom $A \approx_\tau B$, $a_0 \sim b_0$, $a_1 \sim b_1$, $a_4 = 2a_1 \sim 2b_1 = b_3$, $a_9 = a_1^{\perp} \sim b_1^{\perp} = b_8$, $a_7 = a_4^{\perp} \sim b_3^{\perp} = b_5$, $a_{11} \sim b_{11}$.

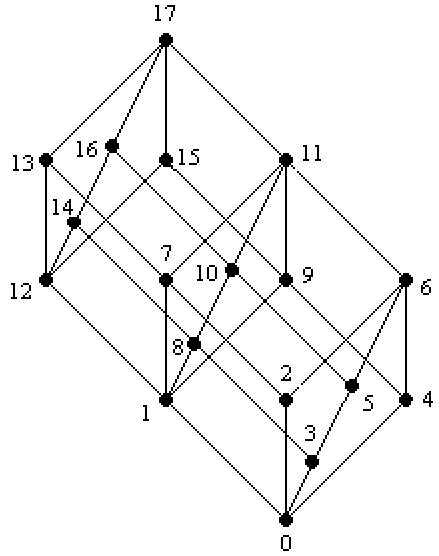
Ďalej položme $\mathcal{P} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}/\sim = \{x_0, x_1, \ldots, x_{17}\}$, kde $x_0 = \{a_0, b_0\}$, $x_1 = \{a_1, b_1\}$, $x_2 = \{a_2\}$, $x_3 = \{b_2\}$, $x_4 = \{a_3\}$, $x_5 = \{b_4\}$, $x_6 = \{a_7, b_5\}$, $x_7 = \{a_5\}$, $x_8 = \{b_6\}$, $x_9 = \{a_8\}$, $x_{10} = \{b_7\}$, $x_{11} = \{a_9, b_8\}$, $x_{12} = \{a_4, b_3\}$, $x_{13} = \{a_6\}$, $x_{14} = \{b_9\}$, $x_{15} = \{a_{10}\}$, $x_{16} = \{b_{10}\}$, $x_{17} = \{a_{11}, b_{11}\}$. Zlepenie MV-algebier $\mathcal{P}$ je nedistributívny D-zväz a jeho Haaseho diagram je na obr. 7.



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

4. GREECHIEHO DIAGRAMY

Greechieho diagramy navrhol Greechie na grafické znázorňovanie OMZ, resp. OMP (kvantových logík), ktoré vzniknú zlepením atomických Booleových algebier.

Greechieho diagram tvoria body a čiary. Body reprezentujú atómy danej logiky a čiary spájajú atómy ležiace v jednom bloku (Booleovej podlogike), pričom dve čiary majú spoločný najviac jeden bod.

Greechieho diagram D-posetu, ktorý vznikne zlepením prípustného systému MV-algebier, tiež tvoria body a čiary. Body znázorňujú prvky $\tau(x)x$, kde x je atóm a $\tau(x)$ je jeho izotropický index. (Sú to idempotentné, alebo tzv. ostré prvky, pre ktoré platí $\tau(x)x \vee (\tau(x)x)^{\perp} = 1_{\mathcal{P}}$). Čiary spájajú ostré prvky atómov patriacich do jedneho bloku (pod-MV-algebry). Ak D-poset $\mathcal{P} = \bigcup_{t\in T} [\mathcal{A}_t]$ je zlepením prípustného systému MV-algebier, potom jeho Greechieho diagram má nasledujúce vlastnosti:

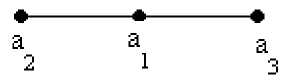
(G1) Pre body reprezentujúce prvky $\tau(x_i)x_i$, $i = 1, \ldots, n$, $n \geq 2$, spojené jednou čiarou platí:

$$\tau(x_1) + \ldots + \tau(x_n) \ \geq\ 3.$$

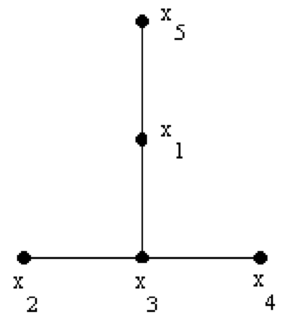
(G2) Ak jedna čiara obsahuje n bodov, $n \geq 2$, a s druhou čiarou má spoločných $n-1$ bodov, potom izotropický index atómu odpovedajúcemu bodu neležiacemu súčasne na druhej čiare je väčší ako 1.

(G3) Ak jedna čiara má spoločné body s dvomi inými čiarami, tak potom musí obsahovať bod, ktorý neleží na žiadnej z ostatných dvoch čiar.

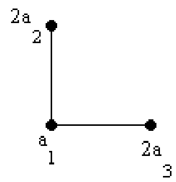
Na obr. 8 je Greechieho diagram Booleovej algebry $\mathcal{A}$ z Príkladu 1, na obr. 9 je Greechieho diagram D-zväzu (OMZ) $\mathcal{P}$ z Príkladu 2, na obr. 10 je Greechieho diagram zlepenia MV-algebier $\mathcal{A}_1$ a $\mathcal{A}_2$ z Príkladu 3, na obr. 11 je Greechieho diagram zlepenia MV-algebier $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ z Príkladu 4 a na obr. 12 je Greechieho diagram zlepenia MV-algebier z Príkladu 5.



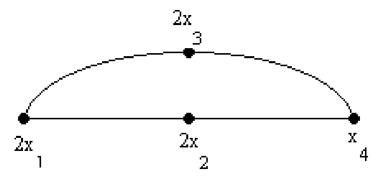
Obr. 8



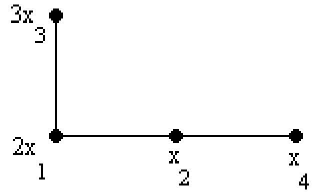
Obr. 9



Obr. 10



Obr. 11



Obr. 12

Nech $\mathcal{A}$ je MV-algebra a $\langle\mathcal{A}\rangle = \{a_1, a_2, \ \ldots\ , a_n\}$ je množina všetkých jej atómov. MV-algebra $\mathcal{A}$ je n-ticou $(\tau(a_1), \tau(a_2), \ldots, \ \tau(a_n))$ určená jednoznačne (až na izomorfizmus). Takže až na izomorfizmus, každá konečná MV-algebra je svojím Greechieho diagramom určená jednoznačne. Počet všetkých prvkov tejto MV-algebry (počet vrcholov odpovedajúceho Haaseho diagramu) je určený vzťahom

$$V = (\tau(a_1) + 1)(\tau(a_2) + 1)\dots(\tau(a_n) + 1).$$

V Príklade 1 je Booleova algebra $\mathcal{A}$ typu $(1, 1, 1)$ a počet jej prvkov je $V = 2.2.2 = 8$. Je izomorfná s algebrou všetkých podmnožín trojprvkovej množiny.

V Príklade 5 je MV-algebra $\mathcal{A}$ typu $(2, 1, 1)$ a počet jej prvkov je $V = 3.2.2 = 12$. MV-algebra $\mathcal{B}$ je typu $(2, 3)$ a počet jej prvkov je $V = 3.4 = 12$.

Nech $\mathcal{P} = [\mathcal{A}] \cup [\mathcal{B}]$ je zlepenie prípustného systému MV-algebier $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ s konečným počtom prvkov. Počet prvkov D-zväzu $\mathcal{P}$ je určený vzťahom

$$V_{\mathcal{P}} = V_{\mathcal{A}} + V_{\mathcal{B}} - S,$$

kde $V_{\mathcal{A}}$, resp. $V_{\mathcal{B}}$ je počet prvkov MV-algebry $\mathcal{A}$, resp. $\mathcal{B}$, a S je počet prvkov MV-algebry $[\mathcal{A}] \cap [\mathcal{B}]$. Nech $\langle[\mathcal{A}]\rangle \cap \langle[\mathcal{B}]\rangle = \{x_1, x_2,\dots, x_k\}$ je množina spoločných atómov blokov $[\mathcal{A}]$ a $[\mathcal{B}]$.

Označme

$$x = (\tau(x_1)x_1)^{\perp} \wedge (\tau(x_2)x_2)^{\perp} \wedge \dots(\tau(x_k)x_k)^{\perp}.$$

Prvok x je atóm MV-algebry $[\mathcal{A}] \cap [\mathcal{B}]$, pričom $\tau(x) = 1$. Potom $\langle [\mathcal{A}] \cap [\mathcal{B}] \rangle = \{x_1, x_2,\dots, x_k, x\}$, takže

$$S = (\tau(x_1) + 1)(\tau(x_2) + 1)\dots(\tau(x_k) + 1)(\tau(x) + 1).$$

V Príklade 4 je $\langle[\mathcal{A}]\rangle = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\tau(a_1) = 2$, $\tau(a_2) = 2$, $\tau(a_3) = 1$, $V_{\mathcal{A}} = 3.3.2 = 18$ a podobne $\langle[\mathcal{B}]\rangle = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\tau(b_1) = 2$, $\tau(b_2) = 2$, $\tau(b_3) = 1$, $V_{\mathcal{B}} = 18$. Ďalej $\langle[\mathcal{A}]\rangle \cap \langle[\mathcal{B}]\rangle = \{x_1, x_4\}$, $\langle [\mathcal{A}] \cap [\mathcal{B}] \rangle = \{x_1, x_4, x_5\}$, kde $x_5 = (2x_1)^{\perp} \wedge (x_2)^{\perp}$, takže $S = 3.2.2 = 12$. Potom $V_{\mathcal{P}} = V_{\mathcal{A}} + V_{\mathcal{B}} - S = 18 + 18 - 12 = 24$.

V Príklade 5 je $\langle[\mathcal{A}]\rangle = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\tau(a_1) = 2$, $\tau(a_2) = 1$, $\tau(a_3) = 1$, $V_{\mathcal{A}} = 12$, $\langle[\mathcal{B}]\rangle = \{b_1, b_2\}$, $\tau(b_1) = 2$, $\tau(b_2) = 3$, $V_{\mathcal{B}} = 12$, $\langle[\mathcal{A}]\rangle \cap \langle[\mathcal{B}]\rangle = \{x_1\}$, $\langle [\mathcal{A}] \cap [\mathcal{B}] \rangle = \{x_1, x_6\}$, $x_6 = (2x_1)^{\perp}$, $S = 3.2 = 6$, $V_{\mathcal{P}} = 12 + 12 - 6 = 18$.

Otvoreným problémom zostáva určenie nutných a postačujúcich podmienok, aby zlepenie prípustného systému MV-algebier bolo D-zväzom a ich grafická reprezentácia pomocou Greechieho diagramov.

LITERATÚRA

[1] GREECHIE, R. J.: *Orthomodular lattices admitting no states.* J. Combinat. Theory, Ser. A 10(1971), 119-132.

[2] SIKORSKI, R.: *Boolean algebras.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1964.

[3] KÔPKA, F. – CHOVANEC, F.: *D-posets.* Mathematica Slovaca **44**(1994), 21-34.

[4] FOULIS, D. J. – BENNETT, M. K. *Effect algebras and unsharp quantum logics.* Found. Phys. **24**(1994), 1331-1352.

[5] PTÁK, P. – PULMANNOVÁ, S.: *Orthomodular structures as quantum logics.* VEDA and Kluwer Acad. Publ., Bratislava and Dordrecht, 1991.

[6] FOULIS, D. J. – GREECHIE, R. J. – RÜTTIMANN, G. T.: *Filters and supports in orthoalgebras.* Inter. Jour. Theor. Phys. **31**(1992), 789-807.

[7] CHANG, C. C.: *Algebraic analysis of many valued logics.* Trans. Amer. Math. Soc. **88**(1957), 467-490.

[8] CHOVANEC, F. – KÔPKA, F.: *Boolean D-posets.* Tatra Mountains Math. Publ. **10**(1997), 183-197.

[9] RIEČANOVÁ, Z.: *Genaralization of blocks for D-lattices and lattice ordered effect algebras.* Jour. Theor. Phys. **39**(2000), 231-237.

[10] CHOVANEC, F. – JUREČKOVÁ, M.: *MV-algebra pasting.* Inter. Jour. Theor. Phys. **42**(2003), 1913-1926.

[11] KÔPKA, F.: *Compatibility in D-posets.* Inter. Jour. Theor. Phys. **34**(1995), 1525-1531.

1

[1] Táto práca vznikla v rámci projektu VEGA 2/3163/23.